10 ШЕГЕРМЕНІҢ ИНТЕГРАЛДАРДЫ ЕСЕПТЕУДЕГІ ҚОЛДАНУЛАРЫ. КОМПЛЕКСТІК ПОТЕНЦИАЛ

10.1 Шегерменің тұйық контур бойынша интегралды есептеуге қолданылуы

Шегермелер туралы Коши теоремасы. Егер $f(z)$ функциясы *D* облысының *C* шекарасында және облыстың $z_1, z_2, ..., z_n$ айрықша нүктелерінен басқа барлық ішкі нүктелерінде аналитикалық болса, онда

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k) \tag{10.1}$$

теңдігі орынды болады**.**

Шегермелер туралы Коши теоремасы мен (10.1), (9.8), және (9.7) теңдіктерінен, егер $|z| = R$ шеңберінің сыртында $f(z)$ функциясының $z = \infty$ нүктесінен басқа айрықша нүктесі жоқ болса

$$\oint_{|z|=R} f(z)dz = -2\pi i\, res\, f(\infty) = c_{-1} \tag{10.2}$$

болатыны шығады.

10.2 Рационал функциялардың интегралдары

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$ түріндегі интегралды қарастырамыз, мұндағы $P_m(x), Q_n(x)$ - x нақты айнымалысының, сәйкесінше, *m* және *n* дәрежелі көпмүшеліктері.

Мұндай интегралды есептеуде келесі тұжырымды қолданған қолайлы болады.

Егер кез келген x үшін $Q_n(x) \neq 0$ және $n \geq m + 2$, яғни бөлімінің дәрежесі алымының дәрежесінен тым болмаса екі бірлікке жоғары болса, онда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = 2\pi i\sigma, \tag{10.3}$$

мұндағы σ дегеніміз $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ комплекс айнымылылы функциясының үстіңгі жартыжазықтықта орналасқан барлық полюстеріндегі шегермелерінің қосындысы.

2. $\int_0^{\infty} R(x)\cos\lambda x dx$, $\int_0^{\infty} R(x)\sin\lambda x dx$

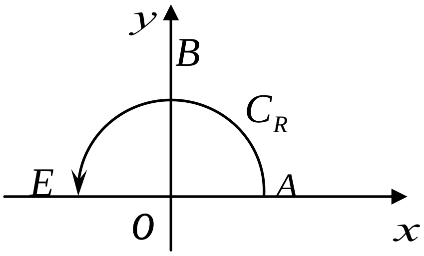
түріндегі интегралдар берілсін, мұндағы $R(x)$ - дұрыс рационал бөлшек, λ - кез келген оң сан.

Интегралдың бұл түрін есептеуде Жорданның келесі теоремасын қолдану қолайлы.

Теорема 12. $g(z)$ функциясы үстіңгі жартыжазықтықтың ($0 < \arg z < \pi$) санаулы ғана айрықша нүктелерінен басқа нүктелерінде аналитикалық болып және осы жартыжазықтықта $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ болса, онда кез келген λ оң саны үшін

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0, \tag{10.4}$$

мұнда C_R үстіңгі жартыжазықтықта жатқан центрі *0*, радиусы *R* жарты шеңбер (7-сурет).



7-сурет

10.3 Комплекс айнымалы функциялар теориясының электр статикасында қолданылуы

$\mathbf{E}(x,y)=E_x(x,y)\boldsymbol{i}+E_x(x,y)\boldsymbol{j}$ жазық электр статикалық өрісі, яғни кернеулік вектор өрісі берілсін. Бұл векторлық өрісті $E=E_x+iE_y$ комплекстік түрінде жазуға болады. Нақты бөлігі мен жорамал бөліктері $E_x=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad E_y=-\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$ шарттарын қанағаттандыратын $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитикалық функциясы **E** өрісінің *комплекстік потенциалы* деп аталады. u - күш функциясы, ал v - потенциалдық функция деп аталады.

Аталған шарттардан келесі теңдіктерді аламыз:

$\mathbf{E}=-grad v$ немесе $E=-i\overline{w'(z)},\quad |E|=|w'(z)|,\quad ArgE=-\frac{\pi}{2}-Argw'(z)$

$u=const$ сызықтары - өрістің күш сызықтары, ал $v=const$ – эквипотенциалдық сызықтар деп аталады.

Кернеулік векторының С тұйық контуры арқылы ағымы

$$N=\oint_C E_n ds.$$

С контурының ішінде орналасқан зарядтардың алгебралық қосындысы мен 2π санынын көбейтіндісіне тең, мұндағы E_n - **E** векторының С контурына (x,y) нүктесінде жүргізілген жанаманың оң бағытына түсірілген проекциясы.

Зарядттарды анықтауда келесі тұжырымды қолданған қолайлы болады.

Егер a - $w'(z)$ функциясының полюсі және w функциясы a нүктесінің аймағында

$$w(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{pi}{z-a}+2qi\ln\frac{1}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots, \tag{10.5}$$

түрінде жіктелсе, онда қатардың: $2qi\ln\frac{1}{z-a}$ мүшесі $(a;2q)$ түрінде белгіленетін a нүктесіндегі $\rho=2q$ шамалы жазық нүктелік зарядын (кеңістікте z жазықтығына a нүктесінде перпендикуляр түзусызықты өткізгіштің бірлік ұзындығына келетін q заряды келеді); $\frac{pi}{z-a}$ мүшесі $(a;p)$ түрінде белгіленетін a нүктесіндегі p мезетті диполін (p - комплекс сан, ал $\overline{p}$ диполь өсінің бағытын анықтайды); қалған $\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ $(k=2,\ldots,n)$ мүшелері a нүктесіндегі $2k$ ретті мультипольдерді анықтайды.

Сәйкесінше шексіздікте

$$w(z)=c_n z^n+\ldots+piz+2qi\ln z+c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\ldots, \tag{10.6}$$

жіктелінуі орынды болса, онда $2qi\ln z$ мүшесі шексіздіктегі $\rho=2q$ шамалы $(\infty;2q)$ жазық нүктелік зарядын, ал piz мүшесі p мезетті $(\infty;p)$ диполін анықтайды.